

応力集中問題における体積力法の 特異積分方程式の数値解析法*

(第1報, 基礎の理論と境界条件の満足度の検討)

野田 尚 昭^{*1}, 松 尾 忠 利^{*2}

Numerical Solution of Singular Integral Equations of the Body Force Method in Notch Problems (1st Report, Basic Theory and Discussion on the Stress along the Boundary)

Nao-Aki NODA and Tadatosh MATSUO

In this paper, numerical solutions of singular integral equations of the body force method in notch problems are discussed. The stress field due to a point force in a body is used as a fundamental solution. Then, the problems are formulated as a system of singular integral equations with Cauchy-type singularities. The unknown functions of the body force densities which satisfy the boundary conditions are approximated by means of the products of the fundamental density functions and polynomials. The accuracy of the present analysis is verified by comparison with the results obtained by the previous method where the unknown functions are approximated by the products of the fundamental density functions and stepped functions. The present method is found to give accurate stress distribution along the notch boundary with short CPU time.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Numerical Analysis, Singular Integral Equation, Stress Concentration, Notch

1. 緒 言

近年, コンピュータの進歩と相まって, 種々の数値解析法が著しい進展を見たが, その中で体積力法は, 切欠きの応力集中係数や, き裂の応力拡大係数の解析に数多く応用されている。体積力法は, 解析しようとする問題を, 物体中の仮想境界面上に体積力または, 食違いを分布させることによって表現するものである。問題を解くことは, 未知関数である仮想境界面上の体積力密度, あるいは, 食違い密度を求めることに帰着される。

体積力法によるき裂問題の解析において, 未知関数である食違い密度は従来, 基本密度関数と階段関数の積で近似する方法が用いられてきたが, 著者らは最近, 階段関数の代わりに多項式を用いて近似する方法が, 数値計算上便利であり, 高精度の解析が可能であることを示した^{(1)~(5)}。そこで本研究では, 切欠きの応力集中問題や切欠きの干渉問題の解析において, 未知関数

である体積力密度を基本密度関数と多項式の積で近似する方法を用いて, 応力集中係数を求め, 従来の未知関数を階段関数で近似した方法や過去の数値解析方法と解析結果の比較検討を行う。

階段関数を用いる方法では, 分割された区間と区間の間で段と段の違いによる応力や変位の不連続が生じるため, 例えば境界上の任意の点の応力を求めるのは容易でなく, 境界条件を満足させた点での応力から内挿によって求めるなどの工夫が必要であった。それに対して, 多項式で近似する解析方法を用いると, 未知関数はなめらかな関数で近似されるため境界上の任意の点の応力が少ない計算時間で容易に求められるという利点がある。したがって, 最大応力の生じる位置があらかじめわからない応力集中問題や, 繰返し計算が必要であるため, 計算時間の節約が要求される形状最適化問題などの解析に特に有効であると考えられる。

2. 体積力法の特異積分方程式の数値解析法

2・1 半無限板中の半だ円切欠きの数値解析法

本研究で行った応力集中係数の数値解析法を, 初めに, 図1に示す, 遠方で一様引張応力 σ_0 を受けるような半無限板中の半だ円切欠きを例にとりて説明する。この問題は, 重ね合せの原理により, 半無限板中の一点

* 平成3年11月1日 材料力学講演会および平成4年4月2日 第69期通常総会講演会において講演, 原稿受付 平成4年4月22日。

*¹ 正員, 九州工業大学工学部(〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

*² 学生員, 九州工業大学大学院。

($\xi = a \cos \phi$, $\eta = b \sin \phi$) に集中力が働くときの任意の点 ($x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$) の応力場の解を用いて解くことができる⁽⁶⁾⁽⁷⁾。このとき問題は、切欠きとなるべき仮想境界上に分布させた x , y 方向の体積力密度 $\rho_x(\phi)$, $\rho_y(\phi)$ を未知関数とする特異積分方程式 (1) で表現される。

$$\begin{aligned} & (-1/2)\{\rho_x(\phi) \cos^2 \theta_0 + \rho_y(\phi) \sin^2 \theta_0\} \\ & + \int_0^\pi K_{nn}^{xx}(\phi, \theta) \rho_x(\phi) b \cos \phi d\phi \\ & + \int_0^\pi K_{nn}^{yy}(\phi, \theta) \rho_y(\phi) a \sin \phi d\phi = -\sigma^\infty \sin^2 \theta_0 \\ & \times (-1/2) \sin \theta_0 \cos \theta_0 \{-\rho_x(\theta) + \rho_y(\theta)\} \\ & + \int_0^\pi K_{ni}^{xx}(\phi, \theta) \rho_x(\phi) b \cos \phi d\phi \\ & + \int_0^\pi K_{ni}^{yy}(\phi, \theta) \rho_y(\phi) a \sin \phi d\phi \\ & = -\sigma^\infty \sin \theta_0 \cos \theta_0 \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

式 (1) は仮想境界上における境界条件 $\sigma_n = 0$, $\tau_{nt} = 0$ に相当している。式 (1) の第一項は、体積力を $\ominus$ 境界 (境界の内部の点で境界に無限に近い点からなる境界⁽⁷⁾) に作用させたとき仮想境界上に生じる応力の項である。また、 $K_{nn}^{xx}(\phi, \theta)$ を例にとると、これは仮想境界上の一点に x 方向の単位大きさの集中力が作用するとき境界上の点に生じる法線方向の応力 σ_n を意味する。式 (1) の第2, 第3項は、 $\sin(\theta - \phi)/2$ の特異性を有する項を含んでいる⁽¹⁰⁾。そのため、 $\theta = \phi$ の場合には、積分のコーシーの主値を取るものとして、記号 $\oint$ で示す。

特異積分方程式 (1) の未知関数である $\rho_x(\phi)$, $\rho_y(\phi)$ は仮想切欠きの微小要素 $ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$ に作用する力の ξ , η 方向の成分をそれぞれ dF_ξ , dF_η とするとき次式で定義される。

$$\rho_x(\phi) = \frac{dF_\xi}{d\eta}, \quad \rho_y(\phi) = -\frac{dF_\eta}{d\xi} \dots \dots \dots (2)$$

もし、体積力の密度として通常の密度の定義に用いられるように、境界に沿った長さ当りの定義 ($\rho_x^*(\phi)$, $\rho_y^*(\phi)$) を用いるものとすれば特異積分方程式 (1) の

解法は、未知関数 $\rho_x^*(\phi)$, $\rho_y^*(\phi)$ を重み関数 $\rho_x(\phi)$, $\rho_y(\phi)$ と基本密度関数の積で近似して解くことに相当している。

$$\begin{aligned} \rho_x^*(\phi) &= \frac{dF_\xi}{ds} = \frac{dF_\xi}{d\eta} n_x = \rho_x(\phi) n_x \\ \rho_y^*(\phi) &= \frac{dF_\eta}{ds} = \frac{dF_\eta}{d\xi} n_y = \rho_y(\phi) n_y \\ &\dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

ここで、 n_x , n_y は仮想境界上の点 (x , y) における外向き法線ベクトル方向余弦 ($\cos \theta_0$, $\sin \theta_0$) である。式 (3) 中の $\rho_x(\phi)$, $\rho_y(\phi)$ が重み関数であり、 n_x , n_y が基本密度関数である⁽⁶⁾。

従来の体積力法では、本来連続して変化しているべき重み関数 $\rho_x(\phi)$, $\rho_y(\phi)$ を、切欠きを M 等分し、分割した各区間で一定値をとる階段関数で近似している。一方本研究では未知関数を連続関数として近似するために多項式を用いる。いま問題の対称性より次のような表現を用いる。

$$\rho_x(\phi) = \sum_{n=1}^M a_n t_n(\phi), \quad \rho_y(\phi) = \sum_{n=1}^M b_n t_n(\phi) \dots \dots (4)$$

$$t_n(\phi) = (\pi/2 - \phi)^{2(n-1)} \dots \dots \dots (5)$$

以上の離散化の方法により、式 (1) の積分方程式は係数 a_n , b_n についての $2M$ 元の連立方程式に還元される。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M (a_n A_n + b_n B_n) &= -\sigma^\infty \sin^2 \theta_0 \\ \sum_{n=1}^M (a_n C_n + b_n D_n) &= -\sigma^\infty \sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ &\dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n &= (-1/2) t_n(\theta) \cos^2 \theta_0 \\ &+ \oint_0^\pi K_{nn}^{xx}(\phi, \theta) b \cos \phi t_n(\phi) d\phi \\ B_n &= (-1/2) t_n(\theta) \sin^2 \theta_0 \\ &+ \oint_0^\pi K_{nn}^{yy}(\phi, \theta) a \sin \phi t_n(\phi) d\phi \\ C_n &= (1/2) t_n(\theta) \sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ &+ \oint_0^\pi K_{ni}^{xx}(\phi, \theta) b \cos \phi t_n(\phi) d\phi \\ D_n &= (-1/2) t_n(\theta) \sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ &+ \oint_0^\pi K_{ni}^{yy}(\phi, \theta) a \sin \phi t_n(\phi) d\phi \\ &\dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

任意の点の応力は係数 a_n , b_n と $A_n \sim D_n$ に相当する影響係数の一次結合で表される。

以上の解析方法により半無限板の半円切欠きの応力集中係数ならびに境界上の応力分布を求める。

2・2 2 だ円孔の干渉問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法 次に、図2に示す、遠方で一様な x 方向の引張り応力 σ_x^∞ および y 方向の引張

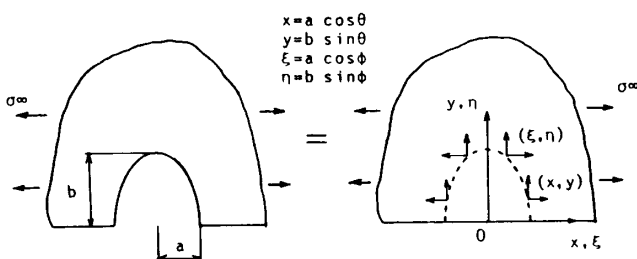


図1 半無限板中の半円切欠き

応力 σ_y^∞ を受けるような無限板中の2だ円孔の問題を取り上げる。この問題は、無限板中の二つの点 $[\xi = \pm(d+a \cos \phi), \eta = b \sin \phi]$ に集中力が働くときの任意の点 $(x = d + a \cos \theta, y = b \sin \theta)$ の応力場の解を用いて解くことができる。このとき問題は、だ円孔となるべき仮想境界上に分布させた x, y 方向の体積力密度 $\rho_x(\phi), \rho_y(\phi)$ を未知関数とする特異積分方程式(8)で表現される。

$$\begin{aligned}
 & (-1/2)\{\rho_x(\theta)\cos^2 \theta_0 + \rho_y(\theta)\sin^2 \theta_0\} \\
 & + \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fx}(\phi, \theta)\rho_x(\phi)b \cos \phi d\phi \\
 & + \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fy}(\phi, \theta)\rho_y(\phi)a \sin \phi d\phi \\
 & = -(\sigma_x^\infty \sin^2 \theta_0 + \sigma_y^\infty \sin^2 \theta_0) \\
 & \times (-1/2)\sin \theta_0 \cos \theta_0 \{-\rho_x(\theta) + \rho_y(\theta)\} \\
 & + \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fx}(\phi, \theta)\rho_x(\phi)b \cos \phi d\phi \\
 & + \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fy}(\phi, \theta)\rho_y(\phi)a \sin \phi d\phi \\
 & = -(\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty)\sin \theta_0 \cos \theta_0 \\
 & \dots\dots\dots(8)
 \end{aligned}$$

式(1)と同様に式(8)の第2項および第3項は、 $\sin((\theta - \phi)/2)$ の特異性を有する項を含んでいる。

式(2)で定義される $\rho_x(\phi), \rho_y(\phi)$ をこの問題では次のように表す。

$$\begin{cases}
 \rho_x(\phi) = \sum_{n=1}^{M1} a_n t_n(\phi) & (-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2) \\
 t_n(\phi) = \cos((\pi/2 - \phi)(n-1)) & (1 \leq n \leq M1) \\
 \rho_x(\phi) = \sum_{n=M1+1}^{M1+M2} a_n s_n(\phi) & (\pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2) \\
 s_n(\phi) = \cos((\pi/2 - \phi)(n-M1-1)) & (M1+1 \leq n \leq M)
 \end{cases}$$

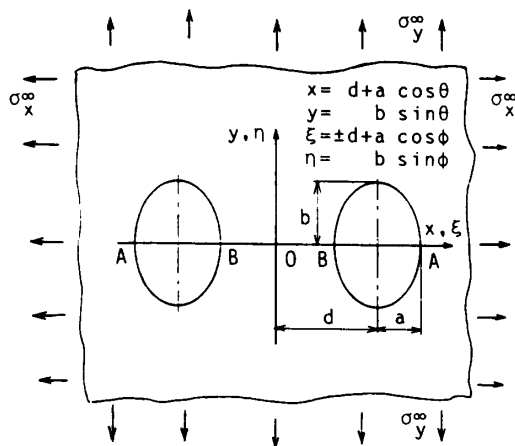


図2 無限板中の2だ円孔

$$\begin{cases}
 \rho_y(\phi) = \sum_{n=1}^{M1+M2} b_n t_n(\phi) \\
 t_n(\phi) = \cos((\pi/2 - \phi)(n-1))
 \end{cases} \dots\dots\dots(9)$$

ここで $M1, M2$ は、それぞれ $0 \leq \theta \leq \pi/2, \pi/2 \leq \theta \leq \pi$ の選点数であり、総選点数は $M = M1 + M2$ である。式(9)は、 $\rho_x(\phi)$ を $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ で $M1$ 次、 $\pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2$ で $M2$ 次の多項式で近似して、 $\rho_y(\phi)$ を $0 \leq \phi \leq \pi$ で M 次の多項式で近似することを意味している。

以上の離散化の方法により、式(8)の積分方程式は、係数 a_n, b_n についての $2M$ 元の連立方程式に還元される。

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^M (a_n A_n + b_n B_n) &= -(\sigma_x^\infty \sin^2 \theta_0 + \sigma_y^\infty \sin^2 \theta_0) \\
 \sum_{n=1}^M (a_n C_n + b_n D_n) &= -(\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty)\sin \theta_0 \cos \theta_0 \\
 &\dots\dots\dots(10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_n &= (-1/2)t_n(\theta)\cos^2 \theta_0 \\
 &+ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nn}^{Fx}(\phi, \theta)b \cos \phi t_n(\phi) d\phi \quad (1 \leq n \leq M1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_n &= (-1/2)t_n(\theta)\cos^2 \theta_0 \\
 &+ \int_{\pi/2}^{3\pi/2} K_{nn}^{Fx}(\phi, \theta)b \cos \phi s_n(\phi) d\phi \\
 &\quad (M1+1 \leq n \leq M)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_n &= (-1/2)t_n(\theta)\sin^2 \theta_0 \\
 &+ \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fy}(\phi, \theta)a \sin \phi t_n(\phi) d\phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_n &= (1/2)t_n(\theta)\sin \theta_0 \cos \theta_0 \\
 &+ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nn}^{Fx}(\phi, \theta)b \cos \phi s_n(\phi) d\phi \quad (1 \leq n \leq M1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_n &= (1/2)t_n(\theta)\sin \theta_0 \cos \theta_0 \\
 &+ \int_{\pi/2}^{3\pi/2} K_{nn}^{Fx}(\phi, \theta)b \cos \phi t_n(\phi) d\phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_n &= (-1/2)t_n(\theta)\sin \theta_0 \cos \theta_0 \\
 &+ \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fy}(\phi, \theta)a \sin \phi t_n(\phi) d\phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\dots\dots\dots(11)
 \end{aligned}$$

任意の点の応力は係数 a_n, b_n と $A_n \sim D_n$ に相当する影響係数の一次結合で表される。

以上の解析方法により、無限板中の2だ円孔の応力集中係数ならびに境界上の応力分布を求める。

3. 解析結果および考察

3・1 半無限板中の半だ円切欠きの解析結果 半無限板中の半だ円切欠きの形状比が、 $b/a = 1$ の場合の

未知関数の密度変化を図3(a)に、 $b/a=2$ の場合の密度変化を図3(b)に示す。本解析結果の選点数および、階段関数を用いた体積力法の解析結果⁽⁷⁾の分割数がともに $M=12, 24$ の場合を示している。多項式近似を用いた本解析法では、選点数 $M=12$ 程度で密度はほとんど収束してしまい連続関数である分布密度をよく近似しているが、階段関数を用いたとき(Stepped

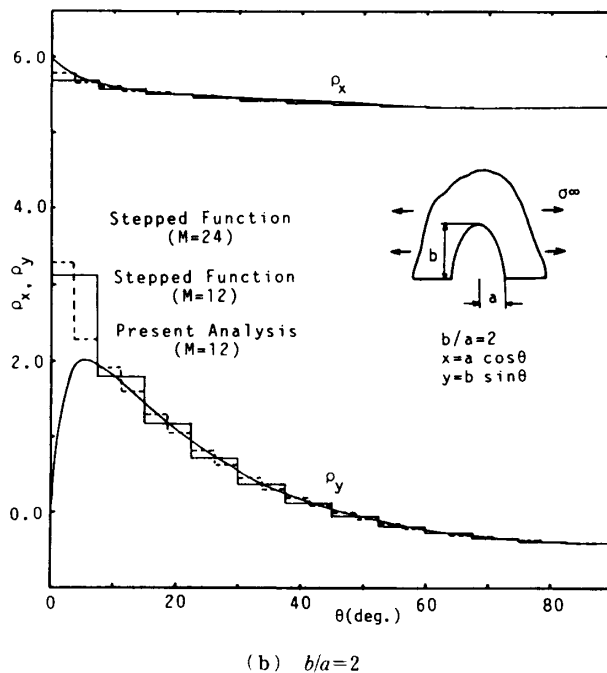
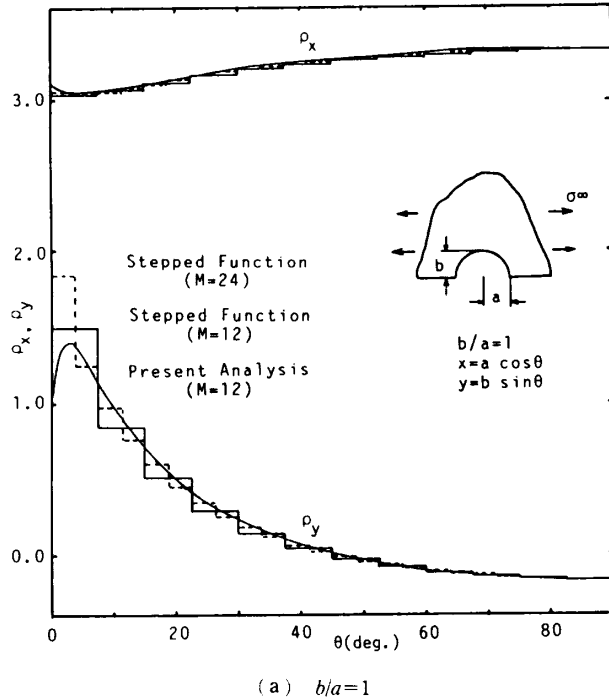


図3 未知関数の収束性の比較

Function)は特に自由縁近くで急な密度変化をうまく表現できずに本解析結果との間に差が生じている。

次に、形状比が $b/a=1, 2, 10$ の場合の応力集中係数の値の収束状況を階段関数を用いた体積力法の解析結果とともに表1(a), (b), (c)に示す。ここで、体積力の密度変化が大きいことを考慮して、 $0^\circ \leq \theta \leq 10^\circ$ での選点数を $M1$, $10^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ での選点数を $M2$ としている。したがって、 M は区間 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ の総選点数 ($M1+M2$) である。表1における体積力法の応力集中係数の外挿値 ($M=\infty$) は、分割数 $M=48, 32$ における解析結果によるものである。本解析による応力集中係数の値は、 $b/a=1$ および $b/a=2$ の場合 $M=14$ で有効数字5けたまで陳らの解析結果⁽⁸⁾と一致している。また、 $b/a=10$ の場合には $M=14$ で有効数字4けたまで陳らの解析結果と一致している。これは外挿を必要とする従来の体積力法の解析例よりも良好な収束性を示している。

表1 半無限板中の半円切欠きの応力集中係数

(a) $b/a=1$			
Present Analysis		B F M	
M	K_t	M	K_t
4	3.056586	8	3.052064
6	3.061805	12	3.056805
8	3.064102	24	3.061290
10	3.064920	32	3.062307
12	3.065215	48	3.063353
14	3.065321	$\infty(48-32)$	3.0654
		[8]	3.0653

(b) $b/a=2$			
Present Analysis		B F M	
M	K_t	M	K_t
4	5.199307	8	5.178407
6	5.213694	12	5.193873
8	5.218326	24	5.207968
10	5.219638	32	5.211044
12	5.220068	48	5.214306
14	5.220230	$\infty(48-32)$	5.2208
		[8]	5.2204

(c) $b/a=10$			
Present Analysis		B F M	
M	K_t	M	K_t
4	22.90348	8	22.50020
6	23.02375	12	22.64869
8	23.00240	24	22.81734
10	22.99309	32	22.85534
12	22.99903	48	22.90320
14	23.00849	$\infty(48-32)$	22.999
		[8]	23.000

境界条件($\sigma_r=0$, $\tau_{r\theta}=0$)の満足度を確かめるために、半円切欠き($b/a=1$)の円孔縁において、選点と選点の中点での応力 σ_θ , σ_r , $\tau_{r\theta}$ の分布を表2に示す。このとき $M1=4$, $M2=8$ で総選点数 $M=12$ である。境界上で0であるべき σ_r , $\tau_{r\theta}$ の値は、 $M=12$ 程度でも 10^{-3} 以下であり高い境界条件の満足度が確認される。

3・2 無限板中の2だ円孔の干渉問題の解析結果

図2の問題において形状比が、 $a/b=1$, $d/a=3$, $\sigma_x^0=0$, $\sigma_y^0=1$ の場合の点A($\theta=0^\circ$)および点B($\theta=180^\circ$)における応力集中係数の値の収束状況を階段関数を用いた体積力法の解析結果とともに表3(a)に、 $a/b=2$, $d/a=3$, $\sigma_x^0=0$, $\sigma_y^0=1$ の場合の解析結果を表3(b)に示す。表中の体積力法(BFM)応力集中係数の

表2 半円切欠きの問題における境界に沿った選点の中点の応力

θ (deg.)	σ_θ	σ_r	$\tau_{r\theta}$
1	-0.0012	0.00042	-0.00040
3	-0.0108	0.00003	0.00004
5	-0.0266	-0.00001	-0.00001
7	-0.0398	0.00001	0.00001
13.5	-0.0326	-0.00025	-0.00037
23.4	0.1814	0.00012	0.00015
32.3	0.5499	-0.00006	-0.00006
41.2	1.0332	0.00003	0.00001
50.0	1.5621	-0.00002	0.00000
58.9	2.0854	0.00001	0.00000
67.8	2.5376	-0.00001	0.00000
76.7	2.8689	0.00002	0.00000

表3 無限板中の2だ円孔の応力集中係数 ($\sigma_x^0=0$, $\sigma_y^0=1$)

(a) $a/b=1$ $d/a=3$					
Present Analysis			B F M		
M	K_{tA}	K_{tB}	M	K_{tA}	K_{tB}
4	3.02246	2.99350	4	3.01615	3.00564
8	3.02018	2.99247	8	3.01823	2.99917
12	3.02000	2.99246	16	3.01921	2.99571
16	3.02001	2.99240	32	3.01967	2.99395
			48	3.01982	2.99336
			$\infty(48-32)$	3.0201	2.9922
			Ling[9]	3.020	2.992

(b) $a/b=2$ $d/a=3$					
Present Analysis			B F M		
M	K_{tA}	K_{tB}	M	K_{tA}	K_{tB}
4	5.04461	5.04732	4	5.04264	5.05363
8	5.04493	5.04717	8	5.04383	5.05035
12	5.04485	5.04719	16	5.04440	5.04868
16	5.04486	5.04716	32	5.04467	5.04785
			48	5.04475	5.04758
			$\infty(48-32)$	5.0449	5.0470

外挿値($M=\infty$)は、分割数 $M=48$, 32 における解析結果から求めたものである。 $a/b=1$ の場合の本解析による応力集中係数の値は、 $M=8$ 程度で K_{tA} , K_{tB} ともに Ling の解析結果⁽⁹⁾ と有効数字4けたまで一致している。これは外挿を必要とする従来の体積力法の解析結果よりも良好な収束性を示している。また、 $a/b=2$

表4 無限板中の2だ円孔の応力集中係数 [$\theta=90^\circ$] ($\sigma_x^0=1$, $\sigma_y^0=0$)

$a/b=1$ $d/a=3$			
Present Analysis		B F M	
M	K_t	M	K_t
4	2.82543	4	2.82074
8	2.82456	8	2.82273
12	2.82432	16	2.82386
16	2.82455	32	2.82445
		48	2.82464
		$\infty(48-32)$	2.82503
		Ling[9]	2.825

表5 2だ円孔の干渉問題における境界に沿った応力分布 ($\sigma_x^0=0$, $\sigma_y^0=1$)

(a) $a/b=1, d/a=3, M=16$			
θ (deg.)	σ_t	σ_n	τ_{nt}
0	3.02001	-0.000317	0.000000
20	2.55390	-0.000333	-0.000345
40	1.37677	-0.000139	-0.000179
60	0.04621	0.000788	0.001175
80	-0.80503	0.002580	0.009009
86	-0.88051	-0.000609	-0.006905
88	-0.90409	-0.000093	-0.013961
90	-0.91981	0.000000	-0.015511
92	-0.92579	0.000093	-0.013961
94	-0.92017	0.000609	-0.006905
100	-0.79335	-0.002580	0.009009
120	0.10783	-0.000788	0.001175
140	1.43530	0.000139	-0.000179
160	2.56053	0.000333	-0.000345
180	2.99240	0.000370	0.000000

(b) $a/b=2, d/a=3, M=16$			
θ (deg.)	σ_t	σ_n	τ_{nt}
0	5.04486	-0.000191	0.000000
20	2.95835	-0.000215	-0.000124
40	0.60119	-0.000076	-0.000049
60	-0.50916	0.000349	0.000317
80	-0.91812	0.001018	0.002660
86	-0.94995	-0.000255	-0.002071
88	-0.95817	0.000451	-0.004197
90	-0.96306	0.000000	-0.004672
92	-0.96449	-0.000451	-0.004197
94	-0.96158	0.000255	-0.002701
100	-0.91459	-0.001018	0.002660
120	-0.48512	-0.000349	0.000317
140	0.63675	0.000076	-0.000049
160	2.98227	0.000215	-0.000124
180	5.04716	0.000206	0.000000

表 6 2 だ円孔の干渉問題における境界に沿った応力分布 ($\sigma_x^* = 1, \sigma_y^* = 0$)

a/b=1, d/a=3, M=16			
θ (deg.)	σ_t	σ_n	τ_{nt}
0	-0.33660	0.000646	0.000000
20	-0.04927	0.000666	0.000691
40	0.81904	0.000278	0.000358
60	1.96456	-0.001577	-0.002349
80	2.72493	-0.005158	0.018011
86	2.76768	0.001219	0.013805
88	2.79911	-0.001865	0.027910
90	2.82455	0.000000	0.031079
92	2.83067	0.001865	0.027910
94	2.79846	-0.001219	0.013805
100	2.70069	0.005158	0.018011
120	1.85017	0.001577	-0.002349
140	0.72476	-0.000278	0.000358
160	-0.06917	-0.000666	0.000691
180	-0.32415	-0.000640	0.000000

の場合には、本解析による応力集中係数の値は、 $M=12$ 程度で K_{IA} , K_{IB} とともに階段関数を用いた体積力法による外挿値と有効数字 4 けたまで一致している。

図 2 の問題において形状比が、 $a/b=1$, $d/a=3$, $\sigma_x^* = 1$, $\sigma_y^* = 0$ の場合の $\theta=90^\circ$ における応力集中係数の値の収束状況を階段関数を用いた体積力法の解析結果とともに表 4 に示す。本解析による応力集中係数の値は、 $M=4$ 程度で有効数字 4 けたまで Ling の解析結果と一致している。これは外挿を必要とする従来の体積力法の解析結果よりも良好な収束性を示している。

境界条件 ($\sigma_n=0$, $\tau_{nt}=0$) の満足度確かめるために、表 3 (a), (b), 表 4 の場合のだ円孔縁の応力 σ_t , σ_n , τ_{nt} の分布を表 5 (a), (b), 表 6 に示す。このとき選点数は $M=16$ である。 $\sigma_x^*=0$, $\sigma_y^*=1$ の場合、点 A および点 B における本解析による応力集中係数の値は、Ling の解析結果と一致しているにも関わらず、境界上で 0 であるべき σ_n , τ_{nt} の値は、 $90^\circ \pm 10^\circ$ 付近で満足度が悪い。また、 $\sigma_x^*=1$, $\sigma_y^*=0$ の場合についても、 $\theta=90^\circ$ における応力は Ling の解析と一致するにも関わらず同様の傾向がある。このことは、これまでの体積力法による応力集中係数の解析において、仮想境界上には、引張型の体積力密度 (式 (2)) しか分布させていないこと、すなわち式 (8) の特異積分方程式を解析対象としていることが原因であると思われる。このた

めに、 $\theta=90^\circ$ 付近の仮想境界上では、引張型の応力成分だけしか打ち消すことができないために、逆対称型の応力成分が打ち消されずに残っているものと考えられる。

4. 結 言

本研究では、具体的問題を通して、体積力法による切欠き問題、および切欠きの干渉問題の解析方法を考察した。特異積分方程式の未知関数である体積力密度を基本密度関数と多項式の積で近似して解くことによって、他の研究者の行った研究結果や、従来の階段関数を用いて近似した体積力法の解析結果との比較を行い、本解析法の精度を確認した。結果をまとめると以下ようになる。

(1) 半無限板中の半だ円切欠きの応力集中係数の解析を行った結果、多項式を用いて近似する本解析法は、階段関数を用いて近似する従来の体積力法よりも良好な収束性が得られた。また、境界上の応力分布が容易に求められたほか、高い境界条件の満足度が確かめられた。

(2) 無限板中の 2 だ円孔の干渉問題の解析を行った結果、本解析法は、従来の体積力法よりも良好な収束性が得られた。また、Ling の解析結果は、本解析とよく一致した。しかし、境界条件の満足度を調べた結果、引張型の体積力を境界上に分布させただけでは、逆対称型の応力成分が残る場合があることがわかった。境界条件を満足させるためには、せん断形の体積力を同時に分布させる必要があると考えられる。この点については今後さらに検討をすすめる予定である。

文 献

- (1) 野田・梅木, Erdogan, 機論, 55-520, A(1989), 2512.
- (2) 野田・小田・陳, 機論, 56-532, A(1990), 2405.
- (3) 野田・小田・増田, 機論, 57-542, A(1991), 2332.
- (4) 野田・石井・小田, 機論, No 928-1, (1992), 23.
- (5) 野田・松尾, 機論, 57-543, A(1991), 2811.
- (6) 西谷・陳, 体積力法, (1987), 89, 培風館.
- (7) 西谷, 機誌, 70-580, (1967), 627.
- (8) 陳・西谷・森, 機論, 55-512, A(1989), 948.
- (9) Ling, J. App. Physics, 19(1948), 77.
- (10) 文献 (6) の 127 ページ.